SULLA DECOMPOSIZIONE

DELLE FUNZIONI

FRATTE RAZIONALI

MEMORIA

PER

NICOLA TRUDI

NAPOLI
STAMPERIA DEL FIBRENO
Strada Trinità Maggiore n.° 26
1865

La teoria della decomposizione delle funzioni fratte razionali in frazioni più semplici, come si usa ordinariamente di esporla, non ha quella generalità, di cui è suscettibile, e lascia molto a desiderare. In fatti in tal ricerca si mira generalmente ad ottenere delle frazioni le quali abbiano per denominatori i fattori lineari di quello della data frazione, semplici o multipli; e questo modo di decomposizione interessa certamente la integrazione de' differenziali fratti razionali. Ma la teoria di cui trattasi interessa in tante altre maniere l'algebra superiore; e molte importanti quistioni esigono che la decomposizione sia regolata diversamente.

Il problema generale di questa teoria consiste nel decomporre la frazione data in frazioni parziali, le quali abbiano per denominatori fattori assegnati di qualunque grado del suo denominatore; e ciò indipendentemente dalla conoscenza de' loro fattori lineari. Ora è questa la quistione della quale ci occuperemo nella presente memoria, la quale verrà poi seguita da una serie di applicazioni, che formeranno il soggetto di altri articoli.

La decomposizione delle frazioni sotto il punto di vista generale, testè dichiarato, e che comprende evidentemente anche la decomposizione ordinaria, non è affatto cosa nuova, essendo stata già considerata da Eu-

lero, e più tardi dal Crelle (*), il benemerito fondatore del giornale di matematiche di Berlino, così degnamente continuato dal Borchardt. Ma noi siamo stati obbligati a riprendere questo argomento per esporre dei metodi più semplici e più proprii alla decomposizione *effettiva* ed al calcolo numerico; imperciocchè trattasi di teorica cui si richiamano quistioni di pratica utilità, come si vedrà nelle applicazioni; e che perciò sembra meritevole di essere promossa nelle istituzioni algebriche.

ART. I.

Principii fondamentali

1. Si sa che ogni funzione fratta razionale di una radice di un'equazione è equivalente ad una determinata funzione intera della stessa radice, di grado inferiore a quello dell'equazione (**). Quindi, se sia data la funzione fratta $\frac{N}{M}$, dove con N ed M intendiamo funzioni intere e razionali di una variabile x, e si supponga che x debba verificar l'equazione:

$$U = k_0 x^m + k_1 x^{m-1} + \ldots + k_m = 0 , \tag{1}$$

in questa ipotesi la funzione fratta potrà essere trasformata in una determinata funzione intera u, generalmente di grado $m-1$; e però della forma:

$$u = a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} .$$

Adunque la funzione intera u ha la proprietà di prendere lo stesso valore che prende la funzione fratta quando la variabile si fa uguale a

(*) Le ricerche di Eulero intorno a questo soggetto, pubblicate molto tempo dopo la sua morte, sono inserite nel Vol. I. delle *Mémoires de Pétersbourg* (an. 1809).

La memoria molto estesa del Crelle sul medesimo argomento è poi ripartita tra i volumi IX e X del suo giornale.

Intorno allo stesso soggetto è pure da leggersi un articolo del Clausen nel volume VIII. del detto giornale di Crelle. E da ultimo una memoria del Cayley sulla partizione de' numeri nel volume delle Transazioni Filosofiche pel 1857.

(**) Questa importante proposizione di algebra superiore è ben conosciuta V. Serret, *Cours d'alg. sup.*, pag. 38.

qualunque radice dell'equazione (1); di modo che sussisterà l'eguaglianza:

$$(2)\qquad \frac{N}{M} = u = a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}$$

unicamente pe' valori di x uguali a quelle radici.

2. È chiaro intanto che per ottenere la funzione u non si ha che a determinare le m costanti $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ a condizione che per ogni radice dell'equazione (1) debba verificarsi l'uguaglianza (2), o l'altra:

$$(3)\qquad N = (a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}) M .$$

Questa eguaglianza non è già una identità, perchè soddisfatta da soli m valori di x. Però è da riflettere che, mediante l'equazione (1) se ne possono eliminare tutte le potenze di x di grado superiore ad $m-1$, per guisa da ridurla ad un'equazione di grado $m-1$, e quindi della forma:

$$A_0 x^{m-1} + A_1 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} = 0 ;$$

i coefficienti $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ essendo funzioni date lineari delle m costanti $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$. Ma allora questa equazione di grado $m-1$, essendo sempre verificata da m valori di x, è necessariamente identica; e ne risultano le m equazioni lineari $A_0 = 0$, $A_1 = 0, \ldots, A_{m-1} = 0$, le quali porgono i valori delle m costanti; e la funzione u resta così determinata.

Tuttavolta, posto mente alla formola (3) si vede che la trasformazione non è più possibile se qualcuna delle radici dell' equazione $U=0$ annulla una delle funzioni N, M; ond'è che la determinazione di u esige che ciascuna di queste funzioni sia prima con la funzione U.

3. Il metodo esposto per determinare la funzione u richiede che l'equazione (3) sia ridotta al grado $m-1$, eliminandone le potenze x^m, x^{m+1}, etc., i di cui valori dovranno esprimersi mediante l'equazione (1) in funzione delle potenze di grado inferiore. Ma a tal riguardo importa di tener presente che, in generale, siffatta riduzione può essere operata molto più speditamente per via della ordinaria divisione algebrica.

4. Premettiamo che in seguito, dinotando P una funzione qualunque intera e razionale di x, se si supponga effettuata la divisione di P per U fino a che si abbia un quoziente intero, per indicare esplicitamente questo *quoziente intero* ed il *residuo*, scriveremo:

$$quo.\frac{P}{U} \qquad e \qquad res.\frac{P}{U} .$$

Ma ordinariamente, per rendere questa notazione più concisa, sopprime-

remo il divisore U, almeno fino a che possa intendersi chiaramente e senza equivoci, e scriveremo invece:

$$quo.\mathrm{P} \qquad \text{e} \qquad res.\mathrm{P}\,.$$

5. Ecco ora un teorema sul quale è fondata la riduzione poco innanzi accennata.

Supposto che la funzione P *sia ridotta al grado* m—1 *mediante l'equazione* U=0, *dico che la funzione ridotta è identica al residuo della divisione di* P *per* U (*).

In fatti essendo identicamente:

$$\mathrm{P}=\mathrm{U}.quo.\mathrm{P}+res.\mathrm{P}\,,$$

posto U=0 si ha per immediata riduzione:

$$\mathrm{P}=res.\mathrm{P}\;; \tag{4}$$

equazione soddisfatta da m valori di x, che sono le m radici dell'equazione U=0; ma frattanto mediante la stessa U=0 il primo membro della (4) può essere ridotto ad un grado inferiore ad m; ed allora, siccome il secondo membro è anch'esso di grado minore di m, perchè residuo relativo al divisore U, che è di grado m, ne segue che la funzione ridotta è necessariamente identica a questo residuo.

6. Nel caso particolare in cui il divisore U è di 1° grado il teorema si traduce in quest'altro:

Il valore che prende la funzione P, *quando* x *si fa uguale all'unica radice dell'equazione* U=0, *equivale al residuo della divisione di* P *per* U.

Quindi, dinotata con a questa radice; o, che torna allo stesso, supposto U$=x-a$, scrivendo $(\mathrm{P})_a$ per significare il valore che prende la funzione P per $x=a$, si avrà:

$$(\mathrm{P})_a=res.\frac{\mathrm{P}}{x-a}\,.$$

Così il valore della funzione P per $x=a$ si può ottenere, com'è ben conosciuto, nel residuo della divisione di P per $x-a$. Ma a tal riguardo è mestieri di rammentare che tanto il residuo, quando il quoziente di quella divisione possono essere calcolati con un procedimento rapidissimo (**), che ordinariamente va descritto negli elementi di algebra, e

(*) Questa proprietà delle funzioni intere, così semplice e così utile, non è affatto nuova; ma abbiamo dovuto darne ragione, perchè gli scrittori di elementi di algebra sogliono dimenticarla.

(**) Questo procedimento si può riassumere in ciò che segue. Supposto il divisore della forma $x-a$, per brevità chiameremo *modulo* della divisione il numero $+a$, che è il secondo termine del divi-

che acquista importanza positiva nelle ricerche delle quali ci occupiamo imperciocchè per esso, come avremo occasione di vedere, vanno ridotti ad una semplicità inattesa, de' calcoli che in altra guisa sarebbe impossibile di condurre innanzi.

7. Tornando al caso generale faremo osservare che, se la funzione P, che si tratta di ridurre a grado inferiore a quello di U, sia un prodotto di più fattori, tra' quali ve ne siano dello stesso grado di U, o di grado maggiore, si potrà, se ciò torni opportuno, cominciare dal ridurre questi fattori, e poscia sviluppare il prodotto per compiere la riduzione. Quindi risulta che la formola (3) si può dapprima ridurre alla seguente:

$$res.\,N = (a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1})\,res.\,M\,;$$

ed in seguito all'altra:

$$res.\,N = res.\left[(a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1})\,res.\,M\right].$$

sore col segno cambiato; ed allora possiamo così enunciare un principio ben noto. *Ogni coefficiente del quoziente è uguale alla somma di quello di ugual posto del dividendo, e di quello che lo precede nello stesso quoziente moltiplicato pel modulo.* Questo principio permette di calcolare l'uno dopo l'altro tutti i coefficienti del quoziente, e lo stesso resto, che perciò si considera come un altro termine del quoziente consecutivo all'ultimo. Ora il procedimento di divisione del quale è parola, non consiste che nell'applicazione del principio enunciato, diretta convenevolmente al calcolo numerico; ed a tal'effetto l'operazione suol disporsi come nel seguente esempio, nel quale il divisore è $x-2$:

$$\text{Divid.} = 3x^5 - 8x^4 + 9x^3 - 16x^2 + 13x + 1 \qquad \text{Mod} = +2$$

$$\begin{array}{l} \quad\;\; 6 \quad -4 \quad\; 10 \quad -12 \quad +2 \\ \hline \text{Quoz.} = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 6x + 1 \;\big|\; +3 = \text{Resto}\,. \end{array}$$

I termini del quoziente ed il resto si suppongono situati per ordine al di sotto de' termini del dividendo, a cominciar dal primo. Per tanto, scritto il primo termine del quoziente, il quale è conosciuto a priori, perchè il suo coefficiente è uguale al primo coefficiente del dividendo, si moltiplicherà questo coefficiente pel modulo, che giova tenere a vista invece del divisore; e si scriverà il prodotto al di sotto del secondo coefficiente del dividendo. Addizionando questi due numeri, la somma darà il secondo coefficiente del quoziente; ed uniformemente si continueranno a calcolare tutti gli altri.

Questo procedimento diviene semplicissimo quando il divisore è $x-1$ o $x+1$. Allora è superfluo di scrivere i prodotti de' coefficienti del quoziente pel modulo; ed il principio poc'anzi ricordato si riduce a dire, che: *Un coefficiente qualunque del quoziente è uguale alla somma di quello di ugual posto del dividendo, e di quello che lo precede nello stesso quoziente, preso col segno proprio o col segno contrario, secondochè il modulo è* $+1$ *o* -1. Ecco un esempio per questo caso:

$$\text{Divid.} = 7x^5 - 9x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 15x - 8 \qquad \text{Mod.} = +1$$

$$\text{Quoz.} = 7x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 7x + 8 \;\big|\; 0 = \text{Resto}\,.$$

Qui ogni coefficiente della riga inferiore si trova addizionando quello che lo sovrasta nella riga superiore, e quello che lo precede nella stessa riga inferiore.

8. Per dare un esempio della trasformazione della quale è parola al n. 1, cercheremo la funzione intera u equivalente alla funzione fratta

$$\frac{N}{M}=\frac{x^5+3x^4-5x^3+11x^2-2x-1}{x^4+x^3-2x^2+7x-2},$$

nella ipotesi che x debba verificar l'equazione:

$$U=x^3-2x^2+3x-1=0 .$$

Essendo U di 3° grado, u sarà di grado inferiore al 3°, e però della forma:

$$u=a_0x^2+a_1x+a_2 ;$$

e le costanti saranno definite dall'equazione:

$$res. N=(a_0x^2+a_1x+a_2)\, res. M .$$

Siccome i residui si rapportano al divisore U, si ha

$$res. N=x^2-3x+1 \quad , \quad res. M=x^2-x+1 ;$$

e quindi l'equazione precedente diviene:

$$x^2-3x+1=(a_0x^2+a_1x+a_2)(x^2-x+1) .$$

Sostituendo ora allo sviluppo del secondo membro il residuo della sua divisione per U, l'equazione identica, che determina le costanti, sarà da ultimo:

$$x^2-3x+1=(a_1+a_2)x^2-(2a_0+a_1+a_2)x+(a_0+a_1+a_2) ;$$

ed in conseguenza i valori delle costanti medesime saranno dati dalle equazioni:

$$a_1+a_2=1$$
$$2a_0+2a_1+a_2=3$$
$$a_0+a_1+a_2=1 .$$

Risolvendole si trova $a_0=0$, $a_1=2$, $a_2=-1$. Quindi risulta.

$$U=2x-1 ;$$

e perciò, quando $x^3-2x^2+3x-1=0$, si ha:

$$\frac{x^5+3x^4-5x^3+11x^2-2x+1}{x^4+x^3-2x^2+7x-2}=2x-1 .$$

9. Quantunque il metodo esposto per determinare la funzione u sia

semplice abbastanza, pure esso ha l'inconveniente, non lieve pel calcolo numerico, di esigere la introduzione di coefficienti indeterminati, che rendono fastidiose le operazioni, e specialmente le divisioni. Esporremo quindi un altro metodo, pel quale la funzione u va direttamente determinata, fondato sul seguente principio. Essendo:

$$N = uM \tag{5}$$

e nel tempo stesso $U=0$, l'equazione (5) si potrà trasformare in un'altra, la quale, senza cessare di essere intera rispetto ad x, abbia costante il coefficiente di u.

Per operare questa trasformazione cominceremo dal moltiplicare successivamente la (5) per le potenze x^0, x, x^2, ..., x^{m-1}, ed avremo il seguente sistema di m equazioni:

$$N = uM \quad , \quad Nx = uMx \quad , \quad Nx^2 = uMx^2 \, , \ldots , \, Nx^{m-1} = uMx^{m-1} .$$

Riducendo i due membri di ciascuna al grado $m-1$ mediante l'equazione $U=0$, queste equazioni divengono:

$$\begin{aligned} res.N &= u\ res.M \\ res.Nx &= u.\ res.Mx \\ res.Nx^2 &= u.\ res.Mx^2 \\ &\cdots\cdots \\ res.Nx^{m-1} &= u.\ res.Mx^{m-1} ; \end{aligned}$$

ma, dando una forma esplicita ai residui che moltiplicano la u ne'secondi membri, potremo scriverle come segue:

$$\begin{aligned} res.N &= u(\alpha_1 x^{m-1} + \beta_1 x^{m-2} + \ldots + \lambda_1 x + \mu_1) \\ res.Nx &= u(\alpha_2 x^{m-1} + \beta_2 x^{m-2} + \ldots + \lambda_2 x + \mu_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ res.Nx^{m-1} &= u(\alpha_m x^{m-1} + \beta_m x^{m-2} + \ldots + \lambda_m x + \mu_m) . \end{aligned}$$

Ora queste equazioni, che diremo *ausiliari* per la determinazione della funzione u, porgono subito quella nella quale è costante il coefficiente

di u, bastando perciò di eliminare da'secondi membri le $m-1$ potenze $x, x^2, \ldots, x^{m-1}$, riguardate come incognite a 1° grado. In generale questa eliminazione si può compiere per via di determinanti, e quindi la funzione u sarà data dall'equazione:

Ma si comprende che lo stesso scopo si può raggiungere per altre vie, e con tutti quei mezzi che sogliono usarsi in simili casi. Per esempio, se si elimina la più alta potenza x^{m-1} tra una delle equazioni ausiliari e tutte le altre, si ha un nuovo sistema di $m-1$ equazioni co'coefficienti di u al grado $m-2$. Eliminando in seguito la potenza x^{m-2} tra una delle nuove equazioni e ciascuna delle altre, si avrebbero $m-2$ equazioni coi coefficienti di u al grado $m-3$. E, così continuando, è chiaro che il sistema verrà ridotto ad una sola equazione col coefficiente di u indipendente da x. Del rimanente ne'casi particolari la natura de'coefficienti numerici de'secondi membri delle equazioni ausiliari suggerirà quasi sempre altre combinazioni più proprie per compiere con maggior prontezza l'eliminazione di cui si tratta. Anzi avverrà sovente, come or ora vedremo, che l'espressione di u potrà risultare da una parte di quelle equazioni; e qualche volta anche da una.

10. È importante ad osservare che per ottenere le m equazioni ausiliari basta dividere per U i due prodotti Nx^{m-1} ed Mx^{m-1}; essendo evidente che i primi membri di quelle equazioni si hanno negli ultimi m parziali residui della prima divisione, sgombrandoli de'fattori $x^{m-1}, x^{m-2}, \ldots, x, x^0$; mentre i coefficienti di u ne'secondi membri si avranno pure negli ultimi m parziali residui della seconda divisione, sgombrandoli de'medesimi fattori.

Tuttavolta, potendo accadere che si abbia bisogno de'quozienti che risultano dal dividere per U le due funzioni N ed M, così in questi casi si potranno prima effettuare queste due divisioni, e poscia continuare a dividere per U i due prodotti x^{m-1}*res.*N ed x^{m-1}*res.*M.

11. Applicando il metodo che abbiamo sviluppato allo stesso esempio

del n. 4, osserveremo che, essendo la funzione u di 2° grado, si richieggono tre equazioni ausiliari, che sono in forma simbolica:

$$res.\,N = u.\,res.\,M$$
$$res.\,Nx = u.\,res.\,Mx$$
$$res.\,Nx^2 = u.\,res.\,Mx^2 .$$

Intanto, siccome i residui si rapportano al divisore $U = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, fatte le due divisioni, com'è detto nel n. 6, si trova

$$res.\,N = x^2 - 3x + 1 \quad , \quad res.\,M = x^2 - x + 1$$
$$res.\,Nx = - x^2 - 2x + 1 \quad , \quad res.\,Mx = x^2 - 2x + 1$$
$$res.\,Nx^2 = -4x^2 + 4x - 1 \quad , \quad res.\,Mx^2 = 0.x^2 - 2x + 1 \;;$$

e quindi le tre equazioni ausiliari per la determinazione di u divengono

$$x^2 - 3x + 1 = u\,(x^2 - x + 1)$$
$$-x^2 - 2x + 1 = u\,(x^2 - 2x + 1)$$
$$4x^2 - 4x + 1 = u\,(\quad 2x - 1) .$$

Nulla ora è più facile che di eliminare le potenze di x da'secondi membri di queste tre equazioni; il che può farsi in più modi. Per esempio, si può prendere la differenza delle prime due; che in tal guisa si ha l'equazione:

$$(6) \qquad 2x^2 - x = ux \,,$$

dove, come nella terza, il coefficiente di u è di 1° grado; e quindi togliendo dalla (6), moltiplicata per 2, quella terza equazione, si ha subito, com'era già noto, $u = 2x - 1$. Qui però bisogna notare che non era affatto necessario di ricorrere alla terza equazione, perchè la (6) può solo essa riprodurre l'espressione di u, non avendosi che a dividerla per x. Ma da un'altra parte cade quasi sott'occhio che la terza equazione può bastare da sè sola alla determinazione di u; perchè messa nella forma

$$(2x - 1)^2 = (2x - 1)\,u \,,$$

non si ha che a dividerla per $2x - 1$ per ritrovare il valore di u.

ART. II.

Decomposizione generale delle frazioni

12. In ciò che segue dinoteremo con N e Δ il numeratore o denominatore della data funzione fratta a decomporre in frazioni parziali, figurando perciò questi simboli funzioni intere e razionali di x; ed ammetteremo che il grado di N sia minore di quello di Δ. Ora la quistione che si tratta di risolvere è la seguente: *supposto che Δ sia un prodotto di fattori razionali primi tra loro, decomporre la data frazione in frazioni parziali aventi que' fattori per denominatori.* Distingueremo questa quistione in due casi, secondochè i fattori di Δ sono semplici o multipli, cioè dell'una o l'altra forma:

$$U = k_0 x^m + k_1 x^{m-1} + \ldots + k_m \quad , \quad U^r = (k_0 x^m + k_1 x^{m-1} + \ldots + k_m)^r .$$

CASO 1°

Frazioni parziali nascenti da' fattori semplici di Δ.

13. Sia U un fattore di Δ ed M l'altro fattore, per modo che:

$$\Delta = UM ;$$

dico che, se U ed M sono primi tra loro, la frazione data si potrà decomporre in due frazioni aventi per denominatori U ed M, e per numeratori determinate funzioni intere di gradi inferiori a quelli de' rispettivi denominatori. In fatti, se ciò è possibile, chiamando u ed N_1 i due numeratori, dovrà essere identicamente:

$$\frac{N}{\Delta} = \frac{N}{UM} = \frac{u}{U} + \frac{N_1}{M} ;$$

e quindi dovrà ancora sussistere l'uguaglianza:

$$(1) \qquad N = uM + UN_1$$

la quale, essendo U primo con M, posto $U=0$, si riduce ad

$$N = uM ;$$

e ne risulta che per soddisfarla bisogna prendere per u la funzione in-

tera in cui si trasforma la funzione fratta $N:M$ nella ipotesi che la variabile x debba verificare l'equazione $U=0$; funzione intera completamente determinata, di grado inferiore a quello di U, che può essere calcolata co' metodi già sviluppati.

Intorno al numeratore N_1 della frazione complementale osserveremo che da (1) si ha:

$$(2) \qquad N_1 = \frac{N - uM}{U};$$

e siccome per la natura della funzione u la differenza $N-uM$ deve annullarsi per ogni radice dell'equazione $U=0$, ne segue che quella differenza è divisibile per U, e si avrà nel quoziente l'espressione di N_1; la quale adunque è una data funzione intera.

Posto ciò dividendo per M la formola (2) si ha evidentemente:

$$(3) \qquad \frac{N_1}{M} = \frac{N - uM}{\Delta}.$$

Ora il grado di N è minore di quello di Δ; inoltre essendo il grado di u minore di quello di U, sarà il grado di uM minore di quello di UM, ossia di Δ; e da ciò risulta che in ciascuno de' due membri della (3) il grado del numeratore è minore di quello del denominatore. Dunque il numeratore N_1 della frazione complementale è anch'esso una funzione intera, di grado inferiore a quello del suo denominatore M, determinata dal quoziente della divisione accennata nel secondo membro della (2).

14. Ma questo secondo membro è suscettibile di una forma molto più utile nelle applicazioni. Essendo:

$$N = U\,quo.N + res.N \quad , \quad M = U\,quo.M + res.M \,,$$

si avrà

$$N - uM = U\,[quo.N - u\,quo.M] + res.N - u\,res.M \,;$$

e sarà quindi dividendo per U:

$$N_1 = quo.N - u\,quo.M - \frac{u\,res.M - res.N}{U}.$$

Siccome il secondo membro dev'essere una funzione intera, la divisione accennata con l'ultima frazione dovrà farsi senza resto; quindi il secondo

termine del dividendo, *res.* N, che è di grado inferiore ad U, dovrà elidersi col resto che si ottiene dividendo per U il prodotto *u res.* M. Perciò l'ultimo termine della formola precedente si riduce semplicemente al quoziente intero di questa divisione; e ne risulta:

$$(4) \qquad N_1 = quo.\,N - u\,quo.\,M - quo.\,(u\,res.\,M)\,.$$

Questa formola è da preferirsi alla (2) pel calcolo di N_1. In fatti, siccome bisogna prima trovare la funzione u mediante l'equazione:

$$res.\,N = u.\,res.\,M\,,$$

ciò importa che innanzi tutto si debbano dividere per U le due funzioni N ed M; sicchè si hanno già in pronto i tre elementi *quo.* N, *quo.* M, *res.* M; e più non resta che a calcolare l'ultimo termine della (4); cioè il quoziente intero della divisione per U del prodotto *u res.* M; divisione questa generalmente più semplice di quella imposta dalla (2), perchè i due fattori del prodotto *u res.* M sono entrambi di grado inferiore ad U.

15. Se si tratta di considerare un'altro fattore di Δ, diverso da U, e però fattore M, si potrà applicare alla frazione complementale $N_1 : M$ lo stesso modo di decomposizione sviluppato a riguardo della frazione originaria; la quale allora risulterebbe decomposta in tre frazioni parziali. Ma ora è chiaro che, in generale, la frazione data si può decomporre in tante frazioni parziali quanti sono i fattori razionali primi tra loro in cui si voglia supporre decomposto il suo denominatore. Secondo quello che precede i numeratori di queste frazioni parziali si determinano l'uno dopo l'altro, considerando ogni volta una frazione complementale; ma è evidente che ciascuno può ancora essere determinato indipendentemente da tutti gli altri, potendo applicarsi a ciascuno il metodo tenuto a riguardo del numeratore u della prima frazione.

16. Per dare un esempio prenderemo a decomporre la frazione:

$$\frac{N}{\Delta} = \frac{5x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 8x + 10}{(x^3 - 2x^2 + 3x + 1)(2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x + 3)} = \frac{u}{U} + \frac{N_1}{M}$$

$$U = x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \qquad , \qquad M = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x + 3\,.$$

Calcolo di u. La funzione u è di 2° grado; e quindi per determinarla occorrono tre equazioni ausiliari:

$$res.\,\mathrm{N} = u\,res.\,\mathrm{M} \quad , \quad res.\,\mathrm{N}x = u\,res\ \mathrm{M}x \quad , \quad res.\,\mathrm{N}x^2 = u\,res.\,\mathrm{M}x^2 \,.$$

Fatte le divisioni per U si trova

$$\begin{array}{lll} quo.\,\mathrm{N} = 5x + 7 & , & quo.\,\mathrm{M} = x + 1 \\ res.\,\mathrm{N} = 6x^2 - 24x + 3 & , & res.\,\mathrm{M} = x^2 - x + 2 \\ res.\,\mathrm{N}x = -12x^2 - 15x + 6 & , & res.\,\mathrm{M}x = x^2 - x + 1 \\ res.\,\mathrm{N}x^2 = -39x^2 + 30x + 12 & , & res.\,\mathrm{M}x^2 = x^2 - 4x - 1 \,; \end{array}$$

e le equazioni ausiliari diverranno:

$$\begin{aligned} 6x^2 - 21x + 3 &= u(x^2 - x + 2) \\ -12x^2 - 15x - 6 &= u(x^2 - x - 1) \\ -39x^2 + 30x + 12 &= u(x^2 - 4x - 1) \,. \end{aligned}$$

Basta prendere la differenza delle prime due per avere l'equazione in cui è costante il coefficiente di u; sicchè, senza impiegar la terza, si ha subito

$$u = 6x^2 - 3x + 3 \,.$$

Calcolo di N_2. L'espressione di N_2 si ha dalla formola (4); calcolandono l'ultimo termine si trova:

$$quo.\,(u\,res.\,\mathrm{M}) = quo.\,[(6x^2 - 3x + 3)(x^2 - x + 2)] = 6x + 3 \,;$$

e quindi risulta:

$$\mathrm{N}_2 = 5x + 7 - (6x^2 - 3x + 3)(x + 1) - (6x + 3) \,,$$

ossia, riducendo:

$$\mathrm{N}_2 = -(6x^3 + 3x^2 + x - 1) \,.$$

Dunquo si ha in fine:

$$\frac{\mathrm{N}}{\Delta} = \frac{6x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x + 1} - \frac{6x^3 + 3x^2 + x - 1}{2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x + 3} \,.$$

CASO 2°

Frazioni parziali nascenti da' fattori multipli di Δ.

18. Sia U^r un fattore di Δ ed M l'altro fattore; sarà

$$\Delta = U^r M .$$

Ora se U ed M sono primi tra loro, la frazione data si potrà decomporre, come segue, in due frazioni:

$$\frac{N}{\Delta} = \frac{N}{U^r M} = \frac{u_0}{U^r} + \frac{N_1}{U^{r-1} M},$$

i numeratori u_0 ed N_1 essendo determinate funzioni intere, di gradi inferiori a quelli de' rispettivi denominatori. In fatti, se la decomposizione è possibile, dovrà sussistere l'uguaglianza:

$$N = u_0 M + U N_1 , \tag{5}$$

la quale, posto $U=0$, si riduce ad

$$N = u_0 M ;$$

e ne risulta che per soddisfare la (5) bisogna prendere per u_0 la funzione intera in cui si trasforma la frazione $N:M$ nella ipotesi di $U=0$.

Ciò premesso si ha dall'eguaglianza (5)

$$N_1 = \frac{N - u_0 M}{U} ; \tag{6}$$

ed osservando che la differenza $N - u_0 M$ si annulla semprechè $U=0$, si conchiuderà chè la medesima è divisibile per U; ed il quoziente darà l'espressiono di N_1.

Dividendo ora i due membri della (6) per $U^{r-1} M$ si ottiene:

$$\frac{N_1}{U^{r-1} M} = \frac{N - U_0 M}{\Delta} ,$$

ed è facile a riconoscere che il grado di $N - u_0 M$ è minore di quello di

Δ. In fatti, per ipotesi, il grado di N è minore di quello di Δ; inoltre, essendo il grado di u_0 minore di quello di U, il grado di $u_0 M$ sarà minore del grado di UM, ossia di Δ. Dunque il grado del numeratore N_1 del primo membro dell'ultima eguaglianza, che è la frazione complementale, è pur esso minore del grado del suo denominatore $U^{r-1}M$.

19. È conseguenza di tutto ciò che la frazione complementale si può sottomettere alla stessa maniera di decomposizione della frazione proposta; e si avrà quindi

$$\frac{N_1}{U^{r-1}M}=\frac{u_1}{U^{r-1}}+\frac{N_2}{U^{r-2}M};$$

u_1 ed N_2 essendo determinate funzioni intere, la prima di grado inferiore a quello di U, da definirsi mediante le due equazioni

$$U=0 \quad , \quad N_1=u_1 M;$$

e l'altra di grado inferiore ad $U^{r-2}M$, data dal quoziente:

$$N_2=\frac{N_1-u_1 M}{U}.$$

Quindi la frazione originaria sarà decomposta in tre frazioni:

$$\frac{N}{\Delta}=\frac{u_0}{U^r}+\frac{u_1}{U^{r-1}}+\frac{N_2}{U^{r-2}M}.$$

Ma, siccome si può ripetere lo stesso procedimento a riguardo della nuova frazione complementale, o così continuare fino a che sia ridotto a zero l'esponente di U, è evidente che si avrà da ultimo:

$$\frac{N}{\Delta}=\frac{u_0}{U^r}+\frac{u_1}{U^{r-1}}+\frac{u_2}{U^{r-2}}+\ldots+\frac{u_{r-1}}{U}+\frac{N_r}{M}. \tag{7}$$

Così il fattore multiplo U^r del denominatore della data frazione dà origine ad r frazioni parziali, che hanno per denominatori le potenze U^r, $U^{r-1}, \ldots, U$; ed i cui numeratori sono determinate funzioni, tutte di grado inferiore a quello di U.

Se si avessero a considerare altri fattori di Δ, e però di M, per compiere la decomposizione si potrà trattare la frazione complementale, quando non si preferisca di operare sulla stessa frazione originaria.

20. In quanto alla determinazione effettiva de' numeratori u_0, u_1, $u_2, \ldots, u_{r-1}$ ed N_r segue da quanto precede che essi vanno calcolati l'uno dopo l'altro mediante i due sistemi di equazioni

$$N = u_0 M \quad , \quad N_1 = u_1 M \quad , \quad N_2 = u_2 M \; , \ldots , \; N_{r-1} = u_{r-1} M \; ;$$

ed

$$N_1 = \frac{N - u_0 M}{U} \; , \quad N_2 = \frac{N_1 - u_1 M}{U} \; , \quad N_3 = \frac{N_2 - u_2 M}{U} \; , \ldots , \; N_r = \frac{N_{r-1} - u_{r-1} M}{U} \; ;$$

il primo de'quali va congiunto all'equazione $U=0$, e si riduce all'altro:

$$res.\,N = u_0\, res.\,M \quad , \quad res.\,N_1 = u_1\, res.\,M \quad , \quad res.\,N_2 = u_2\, res.\,M \; , \quad \text{etc:}$$

mentre al secondo può sostituirsi il seguente:

$$\begin{array}{lll} N_1 = quo.\,N - u_0\, quo.\,M - quo.\,(u_0\, res.\,M) \\ N_2 = quo.\,N_1 - u_1\, quo.\,M - quo.\,(u_1\, res.\,M) \qquad (8) \\ \text{etc:} \qquad\qquad \text{etc:} \qquad\qquad \text{etc:} \end{array}$$

21. È da osservare che se U è di primo grado, i numeratori $u_0, u_1, \ldots, u_{r-1}$ saranno costanti al pari di *res.*M. Allora in ciascuna delle (8) l'ultimo termine sarà nullo, e quelle formole diverranno:

$$\begin{array}{l} N_1 = quo.\,N - u_0\, quo.\,M \\ N_2 = quo\; N_1 - u_1\, quo.\,M \; . \\ \text{etc:} \qquad \text{etc:} \qquad \text{etc:} \end{array}$$

22. Applicando questo metodo ad un esempio, considereremo la seguente decomposizione:

$$\frac{N}{\Delta} = \frac{3x^8 + 3x^7 + 10x^6 - 7x^3 + x^2 + 4}{(x^2+x+1)^3 (x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 6x + 3)} = \frac{u_0}{U^3} + \frac{u_1}{U^2} + \frac{u_2}{U} + \frac{N_3}{M} \; .$$

$$U = x^2 + x + 1 \quad , \quad M = x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 6x + 3 \; .$$

Essendo U di 2° grado, i numeratori u_0, u_1, u_2 saranno lineari, e perciò definiti dalle tre coppie di equazioni ausiliari:

$$\begin{array}{lll} res.\,N = u_0\, res.\,M & , \quad res.\,N_1 = u_1\, res.\,M & , \quad res.\,N_2 = u_2\, res.\,M \\ res.\,Nx = u_0\, res.\,Mx & , \quad res.\,N_1 x = u_1\, res.\,Mx & , \quad res.\,N_2 x = u_2\, res.\,Mx \end{array}$$

dove i valori di N_1, N_2 sono dati dalle formole (8).

Calcolo di u_0 *ed* N_1. Fatte le divisioni abbiamo:

$$quo.\,N=3x^6+7x^4-7x^3+1 \quad , \quad res.\,N=-x+3 \quad , \quad res.\,Nx=4x+1 \, ,$$
$$quo.\,M=x^3+2x^2+3x+4 \quad , \quad res.\,M=-x-1 \quad , \quad res.\,Mx=1 \quad ;$$

qui si può osservare che, essendo $res.\,Mx=1$, nelle tre coppie di equazioni ausiliari le prime restano inutili, perchè le seconde si riducono ad

$$u_0=res.\,Nx \quad , \quad u_1=res.\,N_1x \quad , \quad u_2=res.\,N_2x \, ,$$

ed i valori di u_0, u_1, u_2 si avranno immediatamente ne' secondi membri di queste tre ultime equazioni. Così dalla prima si ha senza più:

$$u_0=4x+1 \, ,$$

quindi

$$quo.(u_0\,res.\,M)=quo.\,[(4x+1)(-x-1)]=-4 \, ;$$

e si ha in conseguenza dalla prima delle formole (8):

$$\begin{aligned} N_1 &= 3x^6+7x^4-7x^3+1-(4x+1)(x^3+2x^2+3x+4)+4 \\ &= 3x^6+3x^4-16x^3-14x^2-19x+1 \, . \end{aligned}$$

Calcolo di u_1 *ed* N_2. Effettuendo le divisioni si trova:

$$quo.\,N_1=3x^4-3x^3+3x^2-16x-1 \quad , \quad res.\,N_1x=4x+2 \, ;$$

e si ha perciò:

$$u_1=4x+2 \, .$$

In seguito avremo:

$$quo.(u_1\,res.\,M)=quo.\,[(4x+2)(-x-1)]=-4 \, ,$$

e quindi, per la seconda delle formole (8):

$$\begin{aligned} N_2 &= 3x^4-3x^3+3x^2-16x-1-(4x+2)(x^3+2x^2+3x+4)+4 \\ &= -(x^4+13x^3+13x^2+38x+5) \, . \end{aligned}$$

Calcolo di u_2 *ed* N_3. Le divisioni danno:

$$quo.\,N_2=-(x^2+12x) \quad , \quad res.\,N_2x=21x+26 \, ;$$

dunque:

$$u_2=21x+26 \, .$$

Dopo ciò si ottiene:

$$quo.(u_3\, res.\, M) = quo.[(21x+26)(-x-1)] = -26\,;$$

e la terza delle formole (8) darà in conseguenza:

$$\begin{aligned} N_3 &= -(x^2+12x)-(21x+26)(x^3+2x^2+3x+4)+26 \\ &= -(21x^4+68x^3+116x^2+174x+83\,. \end{aligned}$$

Così risulta in fine:

$$\frac{N}{\Delta} = \frac{4x+1}{(x^2+x+1)^3} + \frac{4x+2}{(x^2+x+1)^2} + \frac{21x+26}{x^2+x+1} - \frac{21x^4+68x^3+116x^2+174x+83}{x^5+3x^4+6x^3+9x^2+6x+3}\,.$$

23. Le funzioni $u_0, u_1, \ldots, u_{r-1}$, numeratori delle r frazioni parziali provvenienti dal fattore multiplo U^r di Δ, possono essere determinate con altro metodo, talvolta preferibile a quello che abbiamo esposto. Riducendo ad una queste r frazioni si ha dapprima

$$\frac{N}{\Delta} = \frac{u_0+u_1U+u_2U^2+\ldots+u_{r-1}U^{r-1}}{U^r} + \frac{N_r}{M}$$

e quindi facendo sparire i fratti risulta:

$$(9) \qquad N = (u_0+u_1U+u_2U^2+\ldots+u_{r-1}U^{r-1})M + U^rN_r\,:$$

equazione la quale sussiste per qualsivoglia valore di x, unitamente alle sue derivate. Ora questa equazione e le sue successive derivate fino a quella dell'ordine $r-1$ possono determinare l'una dopo l'altra le r funzioni $u, u, \ldots, u_{r-1}$, ponendo in ciascuna $U=0$. Si osservi intanto che nell'equazione (9) e nelle sue derivate fino a quella dell'ordine prescritto, la ipotesi di $U=0$ fa sparire il termine U^rN_r, e tutto ciò che ne risulta mediante la derivazione; di modo che è assolutamente inutile di tenerne conto; e quindi la detta equazione si può ridurre all'altra:

$$(10) \qquad N = (u_0+u_1U+u_2U^2+\ldots+u_{r-1}U^{r-1})M\,.$$

Ciò premesso, posto $U=0$, si ha l'equazione

$$N = u_0M\,,$$

la quale determina senza più la funzione u_0. Inoltre derivando la (10), e ponendovi in seguito $U=0$, risulta

$$N'=u_0M'+u_1'M+u_1U'M ;$$

e questa equazione determina l'altra funzione u_1, imperocchè, essendo conosciuta la funzione u_0, lo è pure la sua derivata u_0'. Trovata l'espressione di u_1, per avere quella di u_2 si prenderà la seconda derivata dalla (10), e vi si porrà $U=0$; e così continuando è chiaro che si perverrà a determinare tutte le r funzioni $u_0, u_1, \ldots, u_{r-1}$.

Questa ricerca si rende più semplice ponendo:

$$(11) \qquad u=u_0+u_1U+u_2U^2+\ldots+u_{r-1}U^{r-1}.$$

Allora la (10) diviene $N=uM$; e quindi prendendo le successive derivate col noto teorema di Leibnitz si ha subito il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned}
N &= uM \\
N' &= uM' + u'M \\
N'' &= uM''+2u'M'+ u''M \\
N''' &= uM'''+3u'M''+3u''M'+u'''M \\
&\text{etc: etc: etc: etc:}
\end{aligned}$$

le quali dovranno poi ridursi mediante l'equazione $U=0$, al pari de' valori di u, u', u'', etc., che verranno dati dalla formola (11).

ART. III.

Frazioni parziali ordinarie

24. Chiamiamo frazioni parziali ordinarie quelle i di cui denominatori sono della forma $U^r=(x-a)^r$, e quindi $U=x-a$. Supposto che Δ abbia il fattore U^r, essendo U funzione di 1° grado, un tal fattore darà origine ad r frazioni parziali aventi per denominatori le potenze $U^r, U^{r-1}, \ldots, U$, e per numeratori delle costanti, che ora, invece di $u_0, u_1, \ldots, u_{r-1}$, preferiamo di indicare con $A_0, A_1, \ldots, A_{r-1}$. Queste r costanti ed il nume-

ratore N_i della frazione complementale possono, come risulta dal n° 21, determinarsi mediante i due seguenti sistemi di formole:

$$\begin{array}{lll} res.N \;\; = A_0 \; res.M & , & N_1 = quo.N \; - A_0 \; quo.M \\ res.N_1 = A_1 \; res.M & , & N_2 = quo.N_1 - A_1 \; quo.M \\ res.N_2 = A_2 \; res.M & , & N_3 = quo.N_2 - A_2 \; quo.M \\ \ldots\ldots\ldots & , & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ res.N_{i-1} = A_{i-1} res.M & , & N_i = quo.N_{i-1} - A_{i-1} quo.M \, . \end{array}$$

Ma siffatta quistione si può risolvere con un metodo più semplice, mediante una formola, la quale fa dipendere il valore di una costante A da' valori di quelle che la precedono $A_0, A_1, \ldots, A_{i-1}$.

Per trovare questa formola osserviamo esser lecito di supporre (n° 19)

$$\frac{N}{\Delta} = \frac{A_0}{U^r} + \frac{A_1}{U^{r-1}} + \ldots + \frac{A_{i-1}}{U^{r-i+1}} + \frac{N_i}{U^{r-i}M} \, ;$$

e se si moltiplica per $U^{r-i}M$ verrà

$$\frac{N}{U^i} = A_0 \frac{M}{U^i} + A_1 \frac{M}{U^{i-1}} + \ldots + A_{i-1} \frac{M}{U} + N_i \, .$$

Essendo N_i funzione intera, se si effettuano le divisioni indicate in questa formola, i residui dovranno elidorsi, e rimarranno i soli termini affetti da' quozienti interi, talchè potremo scrivere:

$$(1) \qquad quo \frac{N}{U^i} = A_0 \, quo. \frac{M}{U^i} + A_1 \, quo. \frac{M}{U^{i-1}} + \ldots + A_{i-1} \, quo. \frac{M}{U} + N_i \, ,$$

avvertendo che qui non era possibile di sopprimere i divisori, perchè per ciascuna divisione il divisore, anzichè essere la semplice funzione U, è una diversa potenza di questa funzione.

Faremo intanto osservare che i quozienti interi risultanti dal dividere la funzione M per le potenze successive U, U^2, U^3, etc., si possono calcolare senza sviluppare le potenze, bastando perciò di dividere più volte di seguito la funzione M per U; vale a dire dividere M per U; indi il quoziente dividerlo per U; poscia il nuovo quoziente dividerlo per U; e così di seguito. Di questi quozienti il primo è quello che va indicato con la notazione *quo.*M; ma ora converranno d' indicarlo scrivendo *quo'*.M; e

quindi scriveremo $quo''.\mathrm{M}$, $quo'''.\mathrm{M}$, etc. per indicare rispettivamente i quozienti della seconda divisione, della terza; etc. Uniformemente, per dinotare il primo residuo, il secondo, il terzo, etc. scriveremo $res'.\mathrm{M}$, $res''.\mathrm{M}$, $res'''.\mathrm{M}$, etc.

In conseguenza di queste convenzioni si ha in generale:

$$quo.\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{U}^p}=quo^{(p)}.\mathrm{M}\ ;$$

e quindi l'eguaglianza (1) si muta in quest'altra:

$$(2)\qquad quo^{(i)}.\mathrm{N}=\mathrm{A}_0\, quo^{(i)}.\mathrm{M}+\mathrm{A}_1\, quo^{(i-1)}.\mathrm{M}+\ldots+\mathrm{A}_{i-1}\, quo'.\mathrm{M}+\mathrm{N}_i\ .$$

Ponendovi $\mathrm{U}=0$, ogni termine si riduce al residuo che si ottiene dividendolo per U; ma, in generale, il residuo risultante dal divider per U il quoziente della p^{esima} divisione è il residuo della $(p+1)^{esima}$ divisione; dunque, tenendo presente che:

$$res.\mathrm{N}_i=\mathrm{A}_i\, res.\mathrm{M}\ ,$$

l'eguaglianza precedente diverrà:

$$res^{(i+1)}.\mathrm{N}=\mathrm{A}_0\, res^{(i+1)}.\mathrm{M}+\mathrm{A}_1\, res^{(i)}.\mathrm{M}+\ldots+\mathrm{A}_{i-1}\, res''.\mathrm{M}+\mathrm{A}_i\, res'.\mathrm{M}\ .$$

Questa formola, nella quale i residui sono costanti, perchè relativi al divisore U di primo grado, vale a determinare tutte le r costanti A_0, $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_{r-1}$; dappoichè ponendovi successivamente $i=0, 1, 2$, etc., si hanno le equazioni:

$$(3)\qquad \begin{aligned} &res'.\mathrm{N}=\mathrm{A}_0\, res'.\mathrm{M}\\ &res''.\mathrm{N}=\mathrm{A}_0\, res''.\mathrm{M}+\mathrm{A}_1\, res'.\mathrm{M}\\ &res'''.\mathrm{N}=\mathrm{A}_0\, res'''.\mathrm{M}+\mathrm{A}_1\, res''.\mathrm{M}+\mathrm{A}_2\, res'.\mathrm{M}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

per le quali le dette costanti restano senza più determinate.

Conosciuti i valori delle costanti, quello di N_r si avrà quindi dalla formola (2), la quale, fatto $i=r$, porge:

$$(4)\qquad \mathrm{N}_r=quo^{(r)}.\mathrm{N}-(\mathrm{A}_0\, quo^{(r)}.\mathrm{M}+\mathrm{A}_1\, quo^{(r-1)}.\mathrm{M}+\ldots+\mathrm{A}_{r-1}\, quo'.\mathrm{M})\ .$$

25. È noto che i residui, risultanti dal dividere più volte di seguito per

$x-a$ una funzione intera e razionale, esprimono i valori che prendono per $x=a$ la funziono istessa e le sue successive derivate, queste ultimo ordinatamente divise per 1, 1×2, $1\times2\times3$, etc: Dunque:

$$res'.\mathrm{N}=(\mathrm{N})_a \quad , \quad res''.\mathrm{N}=(\mathrm{N}')_a \quad , \quad res'''.\mathrm{N}=\frac{(\mathrm{N}'')_a}{1.2} \text{ , etc:}$$

$$res'.\mathrm{M}=(\mathrm{M})_a \quad , \quad res''.\mathrm{M}=(\mathrm{M}')_a \quad , \quad res'''.\mathrm{M}=\frac{(\mathrm{M}'')_a}{1.2} \text{ , etc:}$$

gli accenti ne'secondi membri significando derivazioni; ed in conseguenza le equazioni (3) diverranno:

$$(5) \qquad \begin{aligned} &(\mathrm{N}\ )_a=\mathrm{A}_0(\mathrm{M}\ )_a \\ &(\mathrm{N}')_a=\mathrm{A}_0(\mathrm{M}')_a+\mathrm{A}_1(\mathrm{M}\ )_a \\ &\frac{(\mathrm{N}'')_a}{1.2}=\mathrm{A}_0\frac{(\mathrm{M}'')_a}{1.2}+\mathrm{A}_1(\mathrm{M}')_a+\mathrm{A}_2(\mathrm{M})_a \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Queste equazioni non sono nuove nella teoria della decomposizione delle frazioni; sicchè pel caso delle frazioni ordinarje ci troviamo di aver raggiunto una soluzione conosciuta, che suol dedursi da altri principii. Ma, quantunque i coefficienti dello (3) equivalgano a quelli delle (5), pure, in generale, conviene di calcolarli come residui di divisioni col metodo già descritto (nota al n° 6); il quale, anche ne'casi più complessi riesce a darli con la più grande facilità; mentre il mezzo della derivazione impegna quasi sempre a calcoli lunghi e fastidiosi. È preferibile la derivazione solo se si trattasse di residui relativi a funzioni monomie.

Inoltre, se la derivazione dà i residui, non può dare i quozienti delle successive divisioni per $x-a$. Così, seguendo questa via, non si può profittare della formola (4) per ottenere il numeratore della frazione complementale; e converrà cercarlo direttamente:

26. Aggiungiamo due esempii relativi a frazioni parziali ordinarie.

Es.° 1. $$\frac{\mathrm{N}}{\Delta}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{U}^5\mathrm{M}}=\frac{x^6-9x^5+30x^4-42x^3+23x^2-21x+35}{(x-2)^5(x^5-6x^4+2x^3+51x^2-117x+81)}$$

$$=\frac{\mathrm{A}_0}{\mathrm{U}^5}+\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{U}^4}+\frac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{U}^3}+\frac{\mathrm{A}_3}{\mathrm{U}^2}+\frac{\mathrm{A}_4}{\mathrm{U}}+\frac{\mathrm{N}_5}{\mathrm{M}}\,.$$

Gli elementi, dei quali si ha bisogno in questo caso, sono i quozienti e re-

sidui nascenti dal dividere cinque volte di seguito le funzioni N ed M per $U = x - 2$; ed applicando il solito metodo, si trova:

$$\begin{array}{ll} quo'.\ N = x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 10x^2 + 3x - 15\,, & quo'.\ M = x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 39x - 39 \\ quo''.\ N = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 2x + 7 & quo''.\ M = x^3 - 2x^2 - 10x + 19 \\ quo'''.\ N = x^3 - 3x^2 + 0x + 2 & quo'''.\ M = x^2 + 0x - 10 \\ quo^{IV}.\ N = x^2 - x - 2 & quo^{IV}.\ M = x + 2 \\ quo^{V}.\ N = x + 1 & quo^{V}.\ M = 1 \end{array}$$

$$res'.\ N = 5\,,\ res''.\ N = -1\,,\ res'''.\ N = 11\,,\ res^{IV}.\ N = -2\,,\ res^{V}.\ N = 0$$

$$res'.\ M = 3\,,\ res''.\ M = -1\,,\ res'''.\ M = -1\,,\ res^{IV}.\ M = -6\,,\ res^{V}.\ M = 4\,.$$

Quindi le equazioni che determinano le costanti saranno

$$\begin{aligned} 5 &= 3A_0 \\ -1 &= -A_0 + 3A_1 \\ 11 &= -A_0 - A_1 + 3A_2 \\ -2 &= -6A_0 - A_1 - A_2 + 3A_3 \\ 0 &= 4A_0 - 6A_1 - A_2 - A_3 + 3A_4 \end{aligned}$$

e, risolvendole, ne risulta:

$$A_0 = \frac{5}{3}\,,\quad A_1 = \frac{9}{2}\,,\quad A_2 = \frac{116}{27}\,,\quad A_3 = \frac{338}{81}\,,\quad A_4 = \frac{254}{243}\,.$$

(*) Il procedimento di divisione descritto nella nota al n.° 6 acquista una vera importanza quando trattasi di calcolare il sistema de' quozienti e residui nascenti dal dividere più volte di seguito una stessa funzione per $x - a$. In questo caso per maggiore semplicità si può ridorre il calcolo ad un quadro formato co' soli coefficienti della funzione e de' successivi quozienti, sopprimendo da per tutto le potenze della variabile. Allora ecco, a cagion di esempio, per intero il calcolo necessario per avere i cinque quozienti, ed i cinque residui relativi alle successive divisioni della funzione proposta N per $x - 2$;

```
Coeff. di . . .  N    ,  1 — 9 + 30 — 42 + 23 — 21 + 35   ,  Mod. = 2
                             2 — 14   32 — 20    6 — 30
    »      quo'.   N    ,  1 — 7 + 16 — 10 +  3 — 15 | +  5 = res'.N
                             2 — 10   12    4   14 |
    »      quo''.  N    ,  1 — 5 +  6 +  2 +  7 | —  1 = res''.N
                             2 —  6    0    4 |
    »      quo'''. N    ,  1 — 3 +  0 +  2 | + 11 = res'''.N
                             2 —  2 —  4 |
    »      quoIV.  N    ,  1 — 1 —  2 | —  2 = resIV.N
                             2    2 |
    »      quoV.   N    ,  1 + 1 |    0 = resV.N .
```

In quanto ad N_5, posto nella formola (4) $r=5$, si ha:

$$N_5 = quo^{V}.\,N - (A_0\,quo^{V}.\,M + A_1\,quo^{IV}.\,M + A_2\,quo'''.\,M + A_3\,quo''.\,M + A_4\,quo'.\,M)\;;$$

e però fatte le debite sostituzioni, verrà:

$$N_5 = (x+1) - \frac{5}{3} - \frac{2}{9}(x+2) - \frac{116}{27}(x^2-10) - \frac{338}{81}(x^3-2x^2-10x+19)$$
$$- \frac{254}{243}(x^4-4x^3-6x^2+39x-39)\,,$$

o, riducendo:

$$N_5 = \frac{1}{243}(-254x^4+2x^3+2508x^2+423x+810)\,.$$

Dunque in fine:

$$\frac{N}{\Delta} = \frac{5}{3(x-2)^5} + \frac{2}{9(x-2)^4} + \frac{116}{27(x-2)^3} + \frac{338}{81(x-2)^2} + \frac{254}{243(x-1)}$$
$$+ \frac{-254x^4+2x^3+2508x^2+423x+810}{243(x^5-6x^4+2x^3+51x^2-117x+81)}\,.$$

Questo esempio è tratto dalla memoria del Crelle. Lo abbiamo recato porchè si vegga il grandissimo divario che corre tra il metodo, cho Egli propone como il più opportuno, e quello da noi seguito.

Es.° II. Come un altro esempio considereremo la frazione:

$$\frac{x^{14}}{(x-1)^5 M}\,,$$

dove M dinota il polinomio reciproco:

$$M = x^{10}+4x^9+9x^8+15x^7+20x^6+22x^5+20x^4+15x^3+9x^2+4x+1\;;$$

o cercheremo solamonte i numeratori dello cinquo frazioni parziali provvenienti dal fattore $(x-1)^5$: numeratori che, come al solito, intendiamo figurati con A_0, A_1, A_2, A_3, A_4. In questo modo avremo semplicemente bisogno de' cinque residui risultanti dal dividere cinque volte di seguito per $x-1$ le due funzioni N ed M, essendo $N=x^{14}$. Intanto siccome la funzione N è un monomio, e si cercano i soli residui, è il caso,

come lo abbiamo avvertito (n°25), da preferire la derivazione; e quindi, essendo:

$$N=x^{14} \quad , \quad N'=14x^{13} \quad , \quad N'''=12.13.14.x^{11} \quad ,$$
$$N''=13.14x^{12} \quad , \quad N^{IV}=11.12.13.14x^{10} \quad ,$$

posto $x=a=1$, avremo:

$$(N)_a=res'.N=1 \quad , \quad (N')_a=res''.N=14 \quad , \quad \frac{(N''')_a}{1.2.3}=res^{IV}.N=364 \quad ,$$
$$\frac{(N'')_a}{1.2}=res'''.N=91 \quad , \quad \frac{(N^{IV})_a}{1.2.3.4}=res^{V}.N=1001 \quad .$$

In quanto ai cinque residui relativi alla funzione M converrà cercarli col solito metodo; e quindi tenendo presente un'osservazione già fatta a riguardo del divisore $x-1$, (nota al n° 6) ecco per intero, senza togliere nulla, il calcolo richiesto per tale oggetto.

Coeff. di M ,	1	4	9	15	20	22	20	15	9	4	1
	1	5	14	29	49	71	91	106	115	119	120 = res'.M
	1	6	20	49	98	169	260	366	481	600 = res''.M	
	1	7	27	76	174	343	603	969	1450 = res'''.M		
	1	8	35	111	285	628	1231	2200 = res^{IV}.M			
	1	9	44	155	440	1068	2299 = res^{V}.M .				

Nulla è più semplice della formazione di questo quadro; imperciocchè ogni numero, che vi è iscritto, si trova addizionando i due che lo precedono, uno orizzontalmente, l' altro verticalmente. Altronde abbiamo ancora potuto sopprimere i segni, perchè i coefficienti della funzione M sono tutti positivi.

Dopo ciò per determinare i cinque numeratori si hanno le equazioni:

$$1=120A_0$$
$$14=600A_0+120A_1$$
$$91=1450A_0+600A_1+120A_2$$
$$364=2200A_0+1450A_1+600A_2+120A_3$$
$$1001=2299A_0+2200A_1+1450A_2+600A_3+600A_4 \;;$$

e ne risulta:

$$A_0=\frac{1}{120} \quad , \quad A_1=\frac{9}{120} \quad , \quad A_2=\frac{407}{12.120} \quad , \quad A_3=\frac{202}{3.120} \quad , \quad A_4=\frac{50651}{6(120)^2} \; .$$

La frazione considerata in questo esempio appartiene a quella classe

di frazioni da cui dipendono i problemi relativi alla partizione de'numeri, le quali hanno sempre al denominatore fattori della forma $(x-1)^r$. Essendo nostro proposito di applicare a siffatti problemi l'esposta teoria, abbiamo voluto mostrar da ora a qual punto di semplicità si può condurre la ricerca de' numeratori delle frazioni parziali, provvenienti dal fattore suddetto: ricerca la quale d'altra parte era il punto il meno agevole della quistione.